

Gauß-Moden im Resonator

- damit sich Gauß-Moden in einem Laseresonator stabil ausbilden können, darf sich dessen Form nach einem Umlauf nicht ändern

$$\Rightarrow q_{\text{out}} = q_{\text{in}} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Cq^2 + Dq = Aq + B$$

$$\Rightarrow q^2 + \frac{D-A}{C}q - \frac{B}{C} = 0$$

Weiterhin gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = AD - BC = 1$$

• Damit folgt:

$$q = \frac{A-D}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{A-D}{2C}\right)^2 + \frac{B}{C}}$$

- es muss gelten, dass $\text{Im}(q) \neq 0$ ist. < 0

$$\Rightarrow (A-D)^2 + 4BC = (A-D)^2 + 4(AD-1) = (A+D)^2 - 1 < 0$$

\uparrow
 $BC = AD - 1$

$$\Rightarrow |A+D| < 2$$

\uparrow
Stabilitätsbedingung

- Anwendung auf einen klassischen Laseresonator:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2L/R_1 & 2L(1 + L/R_1) \\ 2(1/R_1 + 1/R_2 + L/(R_1 R_2)) & 1 + 2L/R_1 + 4L/R_2 + 4L^2/(R_1 R_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| 1 + 2\left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2}\right) + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \right| < 1$$

Die Beziehung lässt sich durch Einführung der Parameter $g_1 = 1 + \frac{L}{R_1}$ $g_2 = 1 + \frac{L}{R_2}$ vereinfachen

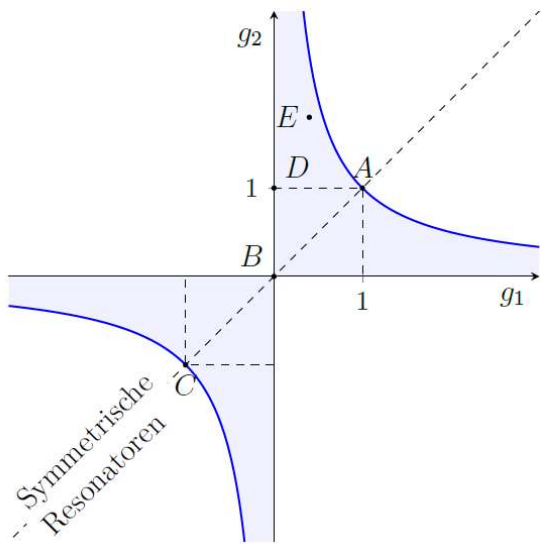
$$\Rightarrow |2g_1 g_2 - 1| < 1$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2g_1 g_2 > 0 \\ 2g_1 g_2 < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 < g_1 g_2 < 1}$$

Wir können das grafisch in einem Resonatorstabilitätsdiagramm darstellen

Im stabilen Resonator muss der Phasenkrümmungsradius am Spiegel gleich dem Krümmungsradius des Spiegels sein!

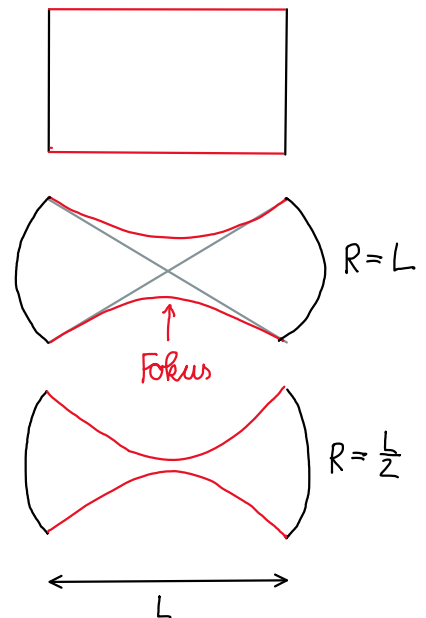
↳ Für eine vorgegebene Gaußmode existiert immer ein passender Resonator (umgekehrt nicht!)



- A.) Planar
($R_1 = R_2 = \infty$)
- B.) Symmetrisch konfokal
($R_1 = R_2 = -L$)
- C.) Symmetrisch konzentrisch
($R_1 = R_2 = -L/2$)
- D.) Konfokal planar
($R_1 = -d, R_2 = \infty$)
- E.) Konkav konvex
($R_1 < 0, R_2 > 0$)

Wir können je nach Lage im Stabilitätsdiagramm zwischen verschiedenen Typen unterscheiden:

- A.) Fabry-Perot Resonator: Zwei Planare Spiegel
 - Stabilitätsgrenze
 - \cos^2 -förmige Feldverteilung in transversale Richtung
- B.) Konfokaler Resonator:
 - Brennpunkt in Resonatormitte
 - Gaußförmige Feldverteilung
- C.) Konzentrischer Resonator:
 - Krümmungsmittelpunkt in Resonatormitte
 - Feldverteilung ist abhängig von der Spiegelaperkur
 - Stabilitätsgrenze



Übung: Berechne die Breite der Strahltaile im Resonator

• Annahme: Symmetrischer Resonator $0 < L < 2R$ $L \rightarrow 0$ Fall A

$L \rightarrow R$ Fall C

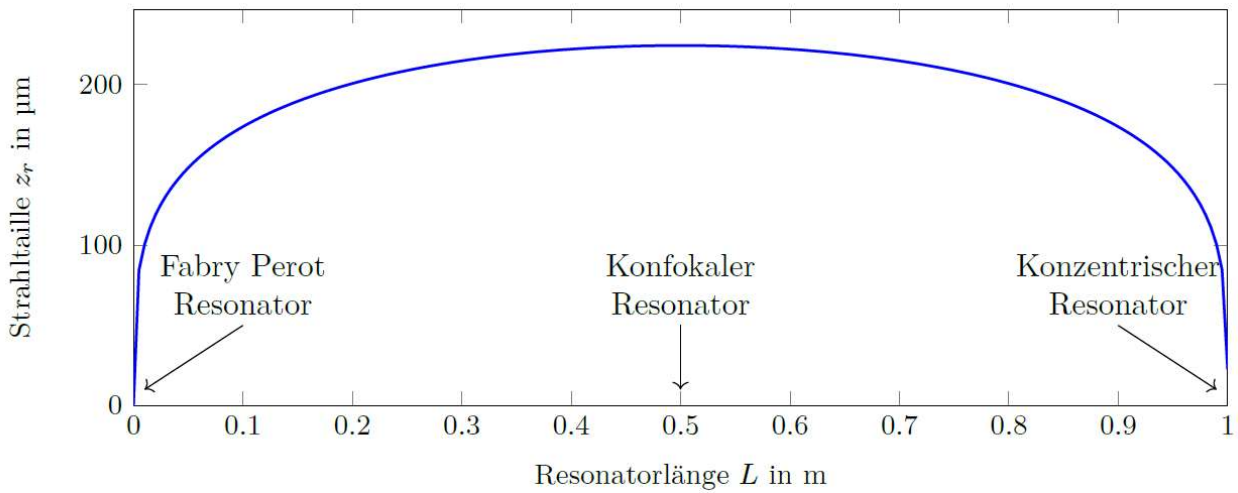
↳ Strahltaile in Resonatormitte

$$\Rightarrow R\left(\frac{L}{2}\right) \stackrel{!}{=} R \quad (\text{Spiegelradius}) \quad \text{mit } R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2} \left(1 + \frac{4z_R^2}{L^2}\right) = R$$

$$\Rightarrow z_R^2 = \frac{RL}{2} - \frac{L^2}{4} \quad \text{mit } z_R = \frac{\pi}{\lambda} w_0^2$$

$$\Rightarrow w_0^4 = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \left(\frac{RL}{2} - \frac{L^2}{4}\right) \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{L(2R-L)}}$$



Beispiel für $R = 0,5 \text{ m}$, $\lambda = 632 \text{ nm}$ (HeNe Laser)

Höhere Lasermoden

• die paraxiale Näherung lässt sich direkt durch eine Modifikation der Helmholtzgleichung gewinnen:

→ Aufteilung der Welle in eine langsam veränderliche Einhüllende und eine harmonische Schwingung in z -Richtung $u(x,y,z) = v(x,y,z) e^{ikz}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\underbrace{v(x,y,z)}_{u(x,y,z)} e^{ikz} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} e^{ikz} + ikv e^{ikz} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{\approx 0} e^{ikz} + 2ik \frac{\partial v}{\partial z} e^{ikz} - k^2 v e^{ikz} = \left[2ik \frac{\partial v}{\partial z} - k^2 v \right] e^{ikz} \\ &\approx 0 \quad \text{"Slowly varying envelope approximation" SVEA} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow 2ik \frac{\partial}{\partial z} - k^2$$

Damit modifiziert sich die Helmholtzgleichung zu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u(x,y,z) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} - \cancel{k^2} + \cancel{k^2} \right) v(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) v(x,y,z) = 0} \quad \text{paraxiale Helmholtzgleichung}$$

Bemerkung: dies ist äquivalent zur Formel der Vorlesung

$$\left[i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + k \right] u_G(x, y, z) = 0 \quad \text{für } u_G(x, y, z) = V e^{ikz}$$

Haben wir eine Lösung gefunden, so lassen sich weitere Lösungen konstruieren durch Ableitung

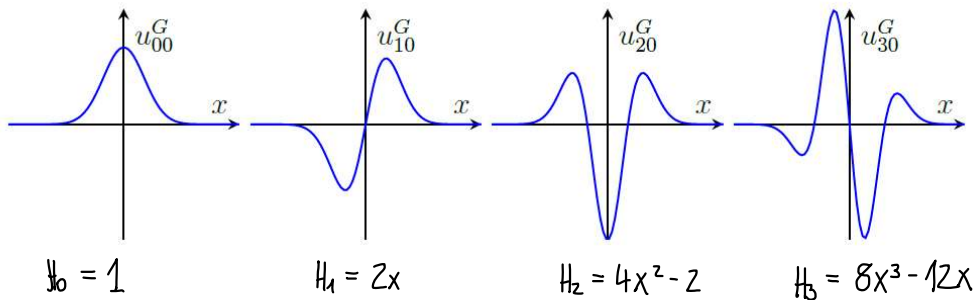
$$\Rightarrow V_{mn} = \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial x^n} V \quad \text{da partielle Ableitungen vertauschen!}$$

$$\text{mit } V = \frac{A_0}{1 + i z/z_R} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2 (1 + i z/z_R)} \right]$$

$$V_{10} = \frac{1}{w_0^2 (1 + i z/z_R)} \cdot \underbrace{2x} \cdot V$$

Die hier entstehenden Polynome sind die **Hermite - Polynome**

$$H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$



Charakterisierung der Moden:

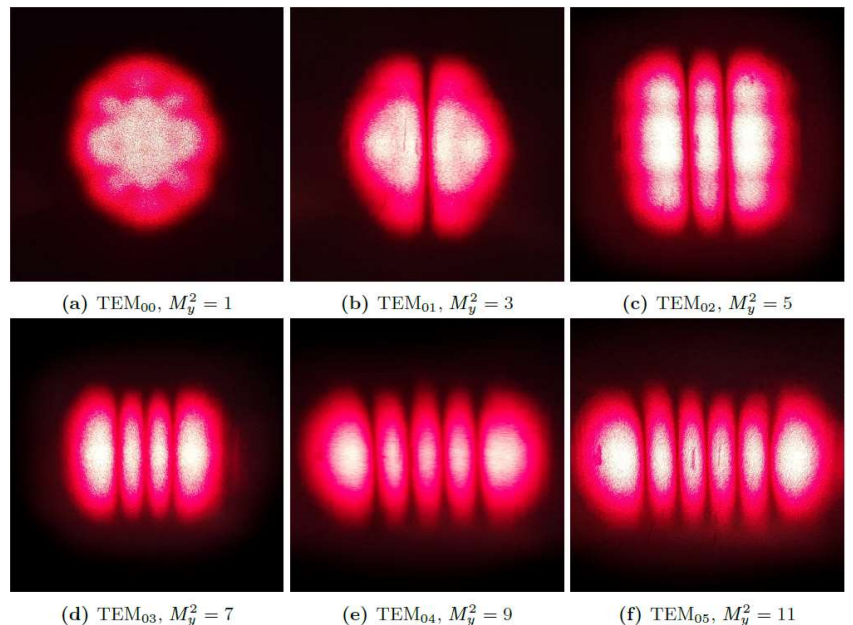
→ Anzahl der Nullstellen bestimmt die Modenordnung

→ höhere Moden werden stärker gebeugt, Charakterisierung mithilfe der Beugungsmaßzahl

$$M^2 = 2n + 1 \quad n\text{-Modenordnung}$$

→ Strahldivergenz θ

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \cdot M^2$$



F-Praktikum - Gaslaser Versuch